(150), 151, 152, 155, 156

# Décomposition de Dunford avec exponentielle de matrice

Gourdon, Algèbre p. 203-204 et Rombaldi p. 766

**thm** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\chi_u$ scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d,n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec $d$ diagonalisable, $n$ nilpotent et

1. $u = d + n$ 2. $d \circ n = n \circ d$.

**démo** : Comme $\chi_u$ est scindé, on peut l'écrire sous la forme $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout $i \in [\![1,s]\!]$ on note $N_i = \ker(u-\lambda_i id)^{\alpha_i}$.

On remarque que l'on a $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ ⊛

**Existence** : Par ⊛, il nous suffit de définir $d$ et $n$ sur chaque $N_i$. Soit $d \in \mathcal{L}(E)$ tel que

Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, Pour tout $x \in N_i$, on pose $d(x) = \lambda_i x$ et $n(x) = u(x) - \lambda_i x = u(x) - d(x)$

ie $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $d_i = d_{|N_i} = \lambda_i id_{N_i}$ et $n_i = u_{|N_i} - \lambda_i id_{N_i}$

Comme $N_i$ est stable par $u$, on a que $N_i$ est stable par $d_i$ et par $n_i$.

Donc $d_i, n_i \in \mathcal{L}(N_i)$

Ainsi défini, $d$ est diagonalisable et $\forall i \in [\![1,s]\!]$ $n_i^{\alpha_i} = 0$.

On pose $\alpha = \sup_i \alpha_i$ et alors $n^\alpha$ s'annule sur chaque $N_i$ donc sur $E$ par ⊛.

Autrement dit, $n$ est nilpotent.

On a pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $d_i = \lambda_i id_{N_i}$ donc $d_i \circ n_i = n_i \circ d_i$. Donc $d$ et $n$ commutent sur chaque $N_i$, donc sur $E$ par ⊛.

**Unicité** : Soit $(d', n')$ un autre couple vérifiant : $d'$ diagonalisable, $n'$ nilpotent, $u = n' + d'$ et $n' \circ d' = d' \circ n'$.

On remarque que l'on a $d' \circ u = u \circ d'$. Donc pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $N_i$ est stable par $d'$.

Comme $d_{|N_i} = \lambda_i id_{N_i}$, on a $d \circ d' = d' \circ d$ sur chaque $N_i$ donc sur $E$ par ⊛

On a $d$ et $d'$ diagonalisables et ils commutent, donc ils sont co-diagonalisables.

Ainsi $d' - d$ est diagonalisable.

Comme $u = d + n = d' + n'$, on a $n = u - d$ et $n' = u - d'$.

Comme $d \circ u = u \circ d$, $d' \circ u = u \circ d'$ et $d \circ d' = d' \circ d$, on a $n \circ n' = n' \circ n$.

On a $n$ et $n'$ nilpotents, notons $p$ et $q$ leurs indices de nilpotence respectivement.

Ainsi $(n-n')^{p+q} = \sum_{i+j=p+q} \binom{p+q}{i} n^i (-1)^j n'^j = 0$ car on a soit $i \geq p$, soit $j \geq q$.

Donc $n-n'$ est nilpotent. Mais $n-n' = d'-d$ qui est diagonalisable.

D'où $d'-d=0$ ie $d'=d$ et donc $n=n'$.

prop : Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $\chi_M$ scindé sur $\mathbb{K}$. Alors on a l'équivalence suivante
$M$ diagonalisable ssi $e^M$ est diagonalisable.

démo :

$\Rightarrow$ | Il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D$ diagonale.

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue

$$e^M = e^{PDP^{-1}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} = P\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} = Pe^D P^{-1}$$

Or $e^D$ est une matrice diagonale. Donc $e^M$ est diagonalisable.

$\Leftarrow$ | Comme $\chi_M$ est scindé on a $M = D+N$ avec $D$ diagonalisable et $N$ nilpotente et $DN=ND$.

Comme $DN=ND$, on a $e^M = e^{D+N} = e^D e^N$

La décomposition de Dunford de $e^M$ est $e^D + e^D(e^N - Id)$.

Comme $e^M$ est diagonalisable, on a $e^D(e^N - Id) = 0$.

Or $e^D$ est inversible donc $e^N = Id$.

Mais $N$ est nilpotente et on note $p$ son indice de nilpotence, et on obtient

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} = Id \quad \text{ie} \quad \sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!} = 0.$$

Ainsi $P(X) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{X^k}{k!}$ est un polynôme annulateur de $N$, donc $\pi_N(X) = X^p$ divise $P$.

Pour des raisons de degré, ceci impose que $p=1$.

Donc $\pi_N(X) = X$ ie $\pi_N(N) = N = 0$

Ainsi $M = D$ ie $M$ est diagonalisable.

Questions : Décomposition de Dunford.

- $\forall i \in [\![1,s]\!],\ n_i^{d_i} = 0$ ?

Pour $x \in N_i$ on a $(u-\lambda_i\, id)^{d_i}(x) = 0 \Leftrightarrow n^{d_i}(x) = 0 \quad \forall x \in N_i$.

- $d' \circ u = u \circ d'$ ?

On écrit $u = d' + n'$ et on a $d' \circ u = d' \circ (d' + n') = d' \circ d' + d' \circ n' = d' \circ d' + n' \circ d'$
$= (d' + n') \circ d' = u \circ d'$.

- $N_i$ stable pour $d'$ $\forall i \in [\![1,s]\!]$ ?

Soit $x \in N_i$. On a $(u - \lambda_i\, id)^{d_i}(d'(x)) = d'\left[(u - \lambda_i\, id)^{d_i}(x)\right] = 0$

Donc $d'(x) \in N_i$.

- co-diagonalisabilité ?

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de $u$ et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres associés.

Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on a $E_{\lambda_i}$ est $v$-stable. On a $v|_{E_{\lambda_i}} \in \mathcal{L}(E_{\lambda_i})$ et est diagonalisable

Donc il existe une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}$ de vecteurs propres de $v$. (et aussi de $u$)

Or $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$, donc $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$ est une base de diagonalisation commune pour $u$ et $v$.

- $d$, $d'$ co-diagonalisable, alors $d' - d$ diagonalisable ?

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = P \Delta P^{-1}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d') = P \Delta' P^{-1}$.

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d' - d) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d') - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = P\Delta' P^{-1} - P \Delta P^{-1} = P(\Delta' - \Delta)P^{-1}$

avec $\Delta' - \Delta$ matrice diagonale. Donc $d' - d$ est diagonalisable.

- $M$ diagonalisable et nilpotente. Alors $M$ est nulle ?

Comme $M$ est nilpotente, on a $Sp(M) = \{0\}$.

Comme $M$ est diagonalisable, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

D'où $M$ est semblable à la matrice nulle, donc $M$ est la matrice nulle.